

## Przepływ laminarny, a turbulentny- czyli wszystko co musisz wiedzieć o liczbie Reynoldsa

### Co to jest liczba Reynoldsa?

Bezwymiarowa liczba Reynoldsa ( $Re$ ) odgrywa kluczową rolę w prognozowaniu zachowania przepływów cieczy i gazów. Stanowi ona kryterium rozróżnienia między przepływem laminarnym, a turbulentnym i jest jednym z podstawowych parametrów determinujących charakter przepływu w układach lepkich. Wybór odpowiedniego modelu numerycznego do analizy przepływu opiera się zwykle na wstępnie obliczonej wartości liczby Reynoldsa.

Liczba Reynoldsa łączy w sobie zarówno właściwości statyczne, jak i dynamiczne płynów, jednak odnosi się przede wszystkim do warunków dynamicznych, ponieważ opisuje zachowanie cieczy w ruchu. Z definicji, liczba Reynoldsa to stosunek sił bezwładności do sił lepkości działających na płyn. Ten stosunek pozwala na klasyfikację przepływu jako laminarnego, gdy dominują siły lepkości, lub turbulentnego, gdy siły bezwładności odgrywają większą rolę.

Siły bezwładności, odpowiedzialne za opór wobec zmiany prędkości przepływu, dominują w przepływach turbulentnych. Z kolei w przepływach laminarnych główną rolę odgrywają siły lepkości, które przeciwdziałają swobodnemu przepływowi. Wartość liczby Reynoldsa można określić według wzoru:

$$Re = \frac{\text{Siły bezwładności}}{\text{Siły lepkości}} = \frac{\text{Właściwości przepływu i płynu}}{\text{Właściwości płynu}}$$

### Historia

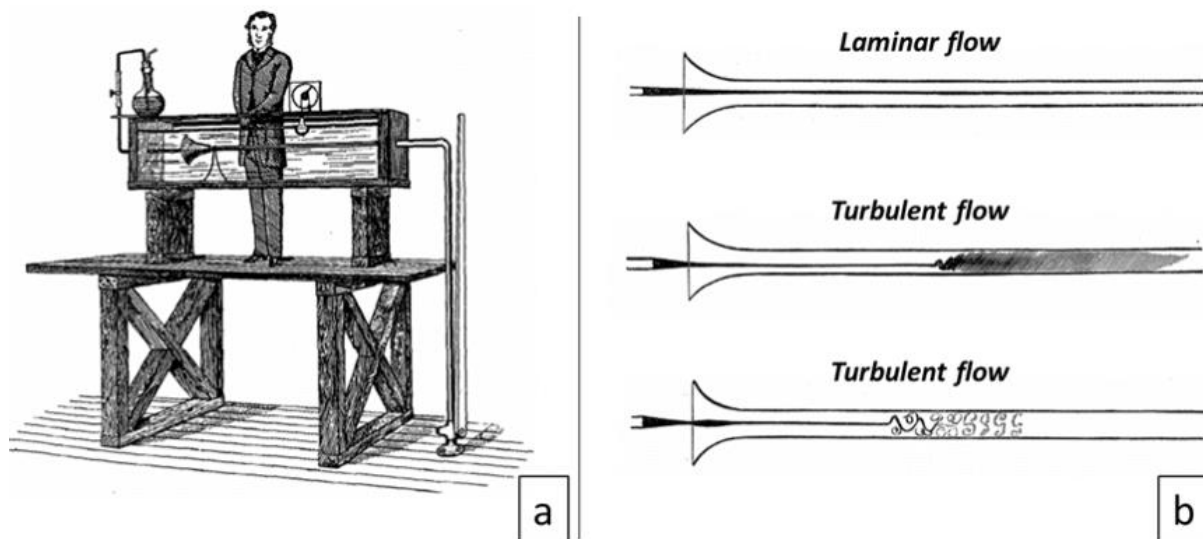
Teoria bezwymiarowej liczby służącej do przewidywania przepływu płynów została zapoczątkowana przez Sir George'a Stokesa (1819-1903), który w swoich pracach starał się wyznaczyć siłę oporu działającą na kulę poruszającą się w cieczy, pomijając wpływ sił bezwładności. W dalszych badaniach, Stokes kontynuował prace Claude'a Louisa Naviera (1785-1836), co zaowocowało rozwinięciem równania ruchu płynu poprzez uwzględnienie w nim członu lepkościowego w 1851 roku. Tak narodziło się równanie Naviera-Stokesa, kluczowe dla opisu dynamiki płynów.

Tzw. przepływ Stokesa, nazwany na cześć jego wkładu w badania nad lepкими płynami, odnosi się do przypadku, w którym liczba Reynoldsa ( $Re$ ) jest tak niska, że w praktyce można uznać ją za równą zero. To podejście pozwala uprościć analizę ruchu cieczy w warunkach dominacji sił lepkości. W kolejnych latach wielu badaczy rozszerzało teorię Stokesa, badając szczegółowo właściwości przepływów o bardzo niskiej liczbie Reynoldsa.

Pomimo tego, że równania Naviera-Stokesa precyzyjnie opisywały zachowanie płynów, ich praktyczne zastosowanie do przewidywania różnych rodzajów przepływów pozostawało wyzwaniem. Zwłaszcza przy wyższych liczbach Reynoldsa, równania te stawały się zbyt złożone, aby łatwo prognozować ruch płynów.

W 1883 roku irlandzki naukowiec Osborne Reynolds wprowadził koncepcję bezwymiarowej liczby, która umożliwia przewidywanie charakteru przepływu płynów na podstawie ich właściwości fizycznych: prędkości, gęstości, lepkości dynamicznej oraz wymiaru charakterystycznego. Reynolds przeprowadził szereg eksperymentów, aby zrozumieć zależności

między prędkością przepływu a jego charakterem. W tym celu skonstruował eksperymentalną instalację (rysunek 1a), w której barwiona woda była wprowadzana do głównego strumienia czystej wody w szklanej rurce (rysunek 1b). To pozwoliło na wizualizację i badanie zachowania cieczy w ruchu, co doprowadziło do lepszego zrozumienia granicy między przepływem laminarnym a turbulentnym.



Rysunek 1 Eksperyment Reynoldsa

Badanie Osborne'a Reynoldsa, zatytułowane „An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Movement of Water in Parallel Channels Shall Be Direct or Sinuous”, dotyczące liczby bezwymiarowej, zostało opublikowane w prestiżowym czasopiśmie „Philosophical Transactions of the Royal Society”. W swojej pracy Reynolds wykazał, że wprowadzona przez niego liczba bezwymiarowa jest niezwykle uniwersalna i pozwala na przewidywanie charakteru przepływu płynów w różnych sytuacjach – od ruchu wody w rurach, aż po przepływ powietrza nad profilami aerodynamicznymi.

Pierwotnie liczba ta była określana jako parametr „R”. Dopiero niemiecki fizyk Arnold Sommerfeld (1868–1951), podczas swojego wystąpienia na Czwartym Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Rzymie w 1908 roku, zaproponował, aby nazywać ją „liczbą Reynoldsa”. Propozycja Sommerfelda szybko zyskała akceptację i od tego momentu termin ten stał się powszechnie używany na całym świecie, symbolizując fundamentalne narzędzie w analizie przepływów płynów.

### Pochodzenie

Bezwymiarowa liczba Reynoldsa przewiduje, czy przepływ płynu będzie laminarny czy turbulentny, odnosząc się do kilku właściwości, takich jak prędkość, długość, lepkość, a także rodzaj przepływu. Jest wyrażana jako stosunek sił bezwładności do sił lepkości i może być wyjaśniona odpowiednio w jednostkach i parametrach, jak poniżej:

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$$

Gdzie  $\rho \left(\frac{kg}{m^3}\right)$  jest gęstością płynu,  $V \left(\frac{m}{s}\right)$  jest charakterystyczną prędkością przepływu i  $L (m)$  jest charakterystyczną skalą długości przepływu. W równaniu użyto raz dynamicznej lepkości płynu  $\mu (Pa \cdot s)$ , a raz użyto lepkości kinematycznej  $\nu \left(\frac{m^2}{s}\right)$ . Przejście między lepkością dynamiczną i kinematyczną jest następujące:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Ponadto jak pokazano poniżej liczba Re jest liczbą bezwymiarową.

$$Re = \frac{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m}{Pa \cdot s} = \frac{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m}{\frac{N}{m^2} \cdot s} = \frac{\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m}{\frac{kg \cdot m}{m^2 \cdot s^2} \cdot s} = \frac{\frac{kg}{m \cdot s}}{\frac{kg}{m \cdot s}} = 1$$

### Płyn, przepływ i liczba Reynoldsa

Liczba Reynoldsa znajduje szerokie zastosowanie, w zależności od specyficznych warunków przepływu płynu, takich jak zmiany gęstości (ściśliwość), lepkości (w przypadku płynów nienewtonowskich), czy też charakter przepływu wewnętrznego i zewnętrznego. Kluczowym pojęciem w analizie przepływów jest **krytyczna liczba Reynoldsa**, która wyznacza granicę poniżej, której przepływ turbulentny nie jest obserwowany. Jeśli ruch turbulentny zostanie wywołany w sposób sztuczny, a następnie pozostawiony samemu sobie, wówczas będzie on wygasał w czasie w sposób asymptotyczny. Jeśli natomiast wartość  $Re_{krytyczne}$  jest przekroczona, wówczas oscylacje turbulentne ulegać będą stopniowemu wzmacnianiu, co doprowadzi wkrótce do zerwania przepływu laminarnego. Wartość ta różni się w zależności od typu przepływu oraz geometrii układu.

Dla przepływu wewnętrznego, takiego jak przepływ cieczy w rurze, krytyczna liczba Reynoldsa wynosi około **2300**. Oznacza to, że przy wartościach Re poniżej tej granicy przepływ jest laminarny, natomiast jest przepływem przejściowym. Dla liczby Reynoldsa większej niż **4000** przepływ jest turbulentny. Z kolei dla przepływu zewnętrznego, jakim jest przepływ nad płaską płytą, gdy prędkość przepływu odpowiada prędkości swobodnego strumienia, krytyczna liczba Reynoldsa mieści się w zakresie **od  $10^5$  do  $10^6$** .

Liczba Reynoldsa jest również pomocna w przewidywaniu zachowania lepkiego przepływu w przypadku płynów newtonowskich, czyli takich, które charakteryzują się stałą lepkością, niezależnie od sił działających na płyn, o ile temperatura pozostaje stała. Woda, alkohol czy olej mineralny są przykładami płynów newtonowskich – ich lepkość nie zmienia się, nawet gdy przyłożone zostanie różne naprężenie.

Przy analizie przepływów kluczowe jest uwzględnienie poprawnego modelu fizycznego. W przypadku płynów nienewtonowskich, których lepkość zmienia się w zależności od warunków, błędne założenia mogą prowadzić do nieścisłych przewidywań. Dlatego liczba Reynoldsa jest niezwykle istotnym narzędziem w badaniu zarówno przepływów wewnętrznych, zewnętrznych, jak i przepływów przejściowych, czyli tych pomiędzy stanem laminarnym a turbulentnym.

### Przejście z przepływu laminarnego do turbulentnego

Przepływ cieczy można opisać dwoma głównymi rodzajami: laminarnym i turbulentnym. Przejście między tymi reżimami stanowi kluczową kwestię, na którą wpływają zarówno

właściwości fizyczne cieczy, jak i charakterystyka przepływu. Jak wspomniano wcześniej, krytyczna liczba Reynoldsa pełni centralną rolę w klasyfikacji przepływów, różnicując je na przepływy wewnętrzne i zewnętrzne.

W przypadku przepływów wewnętrznych, takich jak przepływ cieczy w rurach, liczba Reynoldsa może być stosunkowo łatwo zdefiniowana, a jej krytyczna wartość, około 2300, precyzyjnie wyznacza granicę między przepływem laminarnym a przejściowym. Jednakże dla przepływów zewnętrznych, np. przepływ dookoła profilu aerodynamicznego, precyzyjne określenie wartości krytycznej liczby Reynoldsa staje się trudniejsze. Wynika to z większej złożoności geometrii oraz warunków przepływu, które mogą wpływać na charakter przejścia laminarno-turbulentnego.

W przypadku przepływów zewnętrznych przejście do reżimu turbulentnego zależy od wielu czynników, takich jak lokalna geometria, prędkość płynu czy zakłócenia w otoczeniu. Z tego powodu, choć ogólnie przyjęte wartości krytycznej liczby Reynoldsa istnieją dla różnych scenariuszy, ich precyzyjne zastosowanie może wymagać dodatkowej analizy i uwzględnienia specyfiki danego układu.

### Przepływ wewnętrzny

Przepływ cieczy w rurze jako przepływ wewnętrzny został zilustrowany przez Reynoldsa, jak na rysunku 1b. Rodzaj przepływu jest bezpośrednio zależny od liczby Reynoldsa i wygląda następująco:

Tabela 1: Typ przepływu dla przepływów wewnętrznych

Typ przepływu	Zakres liczby Reynoldsa
Laminarny	$Re < 2300$
Przejściowy	$2300 < Re < 4000$
Turbulentny	$Re > 4000$

W celu określenia wymiaru charakterystycznego dla przepływu wewnętrznego wyznacza się średnicę hydrauliczną  $D_H$ . W przypadku, gdy rura ma kształt cylindryczny, średnicą hydrauliczną  $D_H$  jest rzeczywista średnica przekroju, co oznacza, że liczba Reynoldsa jest następująca:

$$Re = \frac{\rho V D_H}{\mu}$$

Kształt rury lub kanału może być różny (np. kwadratowy, prostokątny itp.). W takich przypadkach średnicę hydrauliczną określa się następująco:

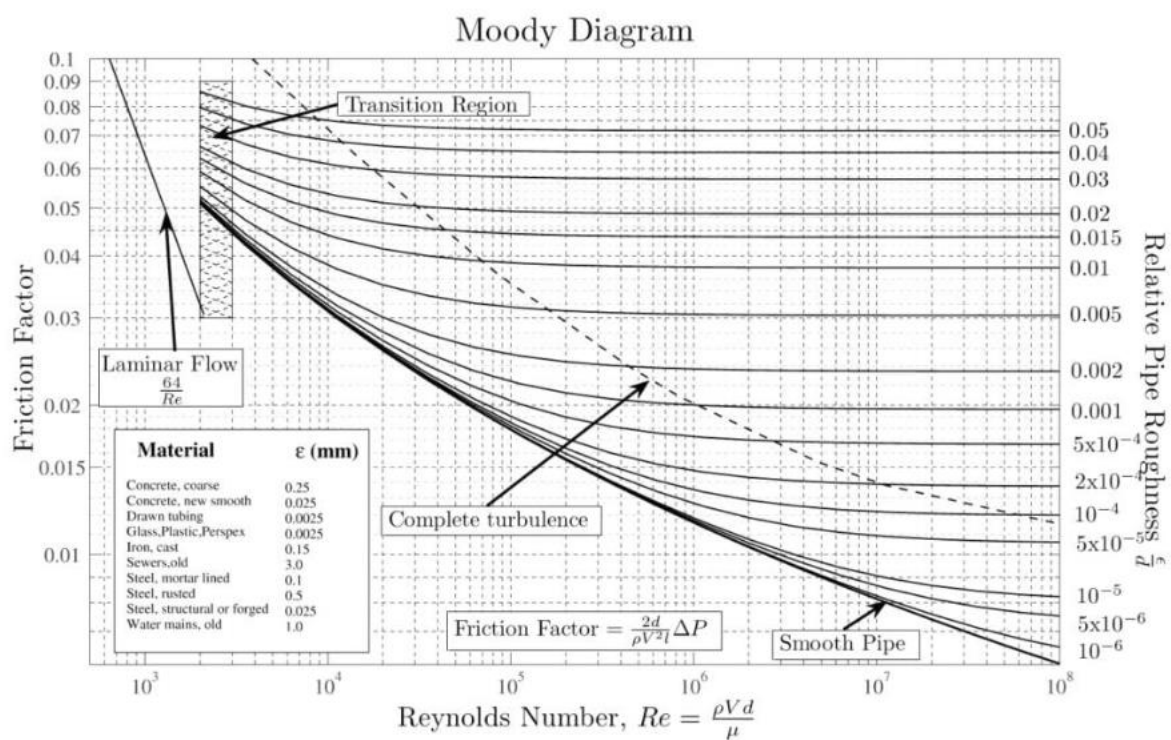
$$D_H = \frac{4A}{P}$$

Gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego i P jest obwodem.

Tarcie na powierzchni rury, spowodowane jej chropowatością, to kluczowy parametr, który znacząco wpływa na charakter przepływu. Chropowatość może przyczyniać się do przejścia przepływu z laminarnego w turbulentny, a także prowadzi do strat energii. Aby skutecznie przewidywać te straty w przypadku przepływu płynów w rurach o chropowatej powierzchni, w 1944 roku Lewis Ferry Moody opracował tzw. **Wykres Moody'ego**. Jest to narzędzie służące do określania współczynnika tarcia, a co za tym idzie – strat energii, wynikających z chropowatości na wewnętrznych ściankach rury.

Wykres Moody'ego jest praktycznym sposobem na oszacowanie strat ciśnienia w przewodach, uwzględniając zarówno liczbę Reynoldsa, jak i względną chropowatość powierzchni. Pozwala on na wyznaczenie współczynnika tarcia, który następnie może być użyty do obliczeń strat energii w instalacjach hydraulicznych. Krytyczna liczba Reynoldsa dla rur o chropowatej powierzchni jest zgodna z wartościami wskazanymi w tabelach, jednak sam wykres stanowi bardziej uniwersalne narzędzie, stosowane w inżynierii przepływów.

Na wykresie Moody'ego, który przedstawiono poniżej, widoczna jest skala logarymiczna dla liczby Reynoldsa na osi poziomej, natomiast oś pionowa po lewej stronie przedstawia skalę współczynnika tarcia. Po prawej stronie wykresu znajduje się również skala względnej chropowatości, która odgrywa kluczową rolę w analizie przepływów w rurach o nierównych ściankach. Dzięki tym zależnościom możliwe jest precyzyjne określenie wpływu chropowatości na straty energetyczne w systemach przepływowych.



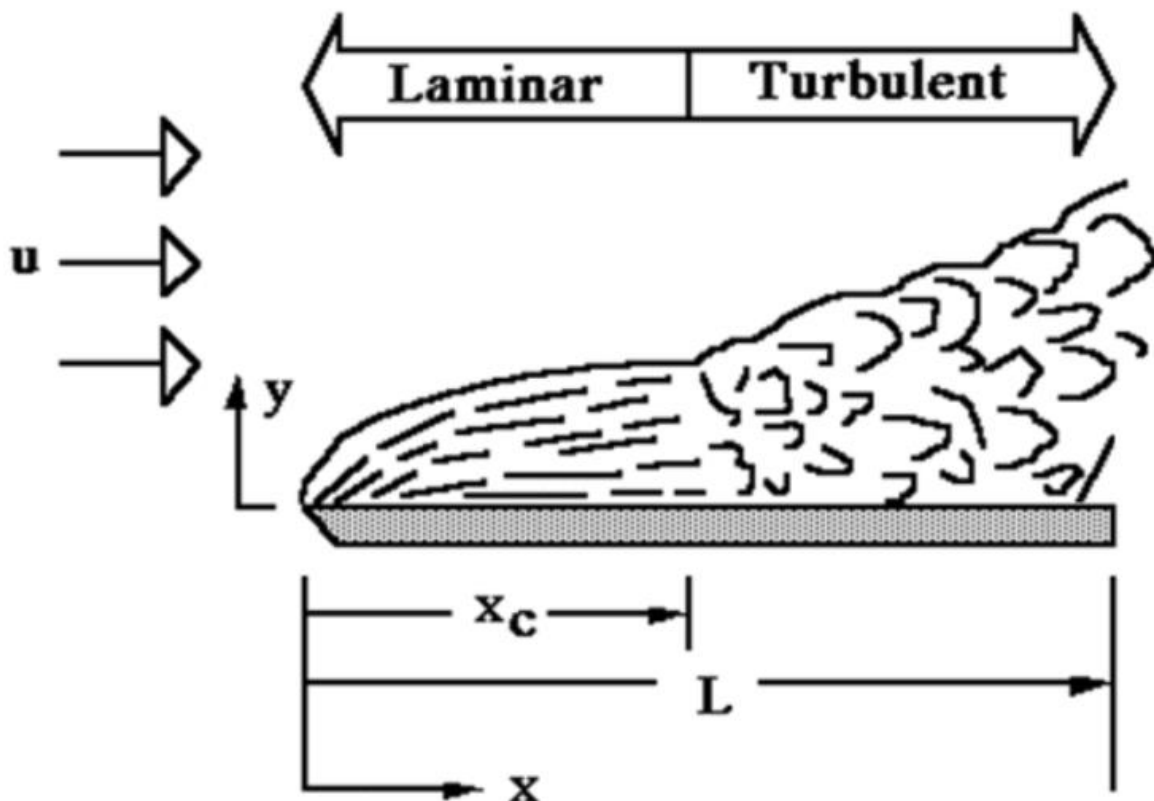
Rysunek 2 Wykres Moody'ego

### Przepływ zewnętrzny

Przepływ zewnętrzny, w którym strumień płynu nie jest ograniczony przez wyraźne granice, wykazuje pewne podobieństwa do przepływu wewnętrznego, zwłaszcza w zakresie przejścia między przepływem laminarnym a turbulentnym. Przepływy wokół ciał, takich jak płaska płyta, cylinder czy kula, stanowią standardowe przykłady, które wykorzystuje się do badania wpływu prędkości przepływu w różnych częściach strumienia.

W 1914 roku niemiecki naukowiec Ludwig Prandtl wprowadził koncepcję **warstwy granicznej**. Jest to cienka warstwa płynu w pobliżu powierzchni ciała, gdzie przepływ jest znacząco spowolniony przez tarcie. Przepływ w warstwie granicznej zależy od liczby Reynoldsa i może przyjmować postać przepływu laminarnego, turbulentnego lub przejściowego. Odkrycie to miało fundamentalne znaczenie dla zrozumienia, jak przepływy zewnętrzne zachowują się w praktycznych sytuacjach.

Na poniższym rysunku przedstawiono przepływ nad płaską płytą, uwzględniając różne reżimy przepływu: laminarny, turbulentny oraz przejściowy. Symbol  $x_c$  oznacza krytyczną długość przejścia, czyli punkt, w którym przepływ zmienia się z laminarnego na turbulentny,  $L$  to całkowita długość płyty, a  $V$  odnosi się do prędkości swobodnego strumienia przepływu płynu. Badania Ludwiga Prandtla nad warstwą graniczną znacząco wpłynęły na zrozumienie oporu aerodynamicznego, co z kolei umożliwiło inżynierom bardziej precyzyjne przewidywanie zachowania przepływów wokół ciał. Dzięki tym badaniom stało się możliwe efektywne projektowanie kształtów obiektów poruszających się w płynach, takich jak samoloty, samochody czy statki, w celu minimalizacji oporu i strat energetycznych. Prandtlowi udało się wyjaśnić, jak rozwój warstwy granicznej wpływa na występowanie przepływu laminarnego i turbulentnego oraz jak te zjawiska oddziałują na konstrukcje inżynierskie.



Rysunek 3 Przepływ nad płaską płytą

Ogólnie rzecz biorąc, warstwa graniczna rośnie w miarę przesuwania się wzdłuż osi  $x$  na płaskiej płycie, co prowadzi do zwiększenia grubości warstwy, a w konsekwencji do powstania warunków niestabilnych. W tych warunkach liczba Reynoldsa rośnie wraz z długością płyty, co przy odpowiednich wartościach powoduje przejście przepływu z laminarnego w turbulentny. **Krytyczna liczba Reynoldsa** dla przepływu nad płaską powierzchnią, przy której następuje to przejście, wynosi około:

$$Re_{krytyczne} = \frac{\rho V x}{\mu} \geq 3 \cdot 10^5 \text{ do } 3 \cdot 10^6$$

Złożoność przepływu zewnętrznego, zależna od geometrii ciała, powoduje, że krytyczna liczba Reynoldsa może różnić się w zależności od kształtu i warunków brzegowych.

W dodatku, w przepływach zewnętrznych często dochodzi do zjawiska **separacji warstwy granicznej**, co jest anomalią w porównaniu do przepływów wewnętrznych. Separacja ta prowadzi do odrywania się warstwy granicznej od powierzchni, tworząc regiony zawirowań, co z kolei wprowadza niejednoznaczności w analizie przepływu. Takie zjawiska są trudniejsze do modelowania i przewidywania, zwłaszcza w kontekście krytycznej liczby Reynoldsa, która może się różnić w zależności od lokalnych warunków geometrycznych i dynamiki przepływu.

### Niska i wysoka liczba Reynoldsa

Liczba Reynoldsa odgrywa kluczową rolę w zastosowaniu równań Naviera-Stokesa, umożliwiając wybór odpowiednich modeli matematycznych w zależności od warunków przepływu. W sytuacjach, gdy liczba Reynoldsa dąży do nieskończoności (**Re** → ∞), efekty lepkościowe stają się zaniedbywalne, a warunki związane z lepkością w równaniach Naviera-Stokesa mogą być uproszczone lub całkowicie pominięte.

W takich przypadkach uproszczone równania Naviera-Stokesa przyjmują postać **równań Eulera**, które opisują przepływy nielepkie. Równania te ignorują siły lepkości i skupiają się wyłącznie na siłach bezwładności, co sprawia, że są szczególnie użyteczne w analizie przepływów o bardzo wysokiej liczbie Reynoldsa, takich jak przepływy wokół szybko poruszających się obiektów. W skróconej formie, równania Eulera można zapisać następująco:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \times u$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g$$

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \times u$$

W równaniach tych:

- **ρ** oznacza gęstość,
- **u** to prędkość,
- **p** reprezentuje ciśnienie,
- **g** odnosi się do przyspieszenia grawitacyjnego,
- **e** to określona energia wewnętrzna.

Choć efekty lepkościowe są istotne w wielu przypadkach, modele nielepkie, takie jak równania Eulera, oferują wystarczająco dokładne rozwiązania w sytuacjach, gdzie dominują siły bezwładnościowe. Przykładem może być szybki przepływ zewnętrzny nad ciałami, gdzie podejście nielepkie jest odpowiednim przybliżeniem, szeroko stosowanym w aerodynamice i hydrodynamice.

Z kolei w sytuacjach, gdy **Re** << 1, siły bezwładności stają się znikome, a efekty lepkościowe dominują. W takich warunkach równania Naviera-Stokesa upraszcza się, eliminując człony związane z bezwładnością. Powstały model jest nazywany **przepływem pełzającym** lub **przepływem Stokesa**. Ten typ przepływu jest charakterystyczny dla sytuacji, gdzie prędkości są bardzo niskie, a lepkość odgrywa kluczową rolę, jak ma to miejsce w ruchu cząstek w cieczach lepkich, na przykład w mikrofluidyce czy ruchu w osoczku krwi. Taki model można zapisać w następujący sposób:

$$\mu \nabla^2 u - \nabla p + f = 0$$

$$\nabla \times u = 0$$

Gdzie  $\nabla p$  jest gradientem ciśnienia,  $\mu$  jest lepkością dynamiczną i  $f$  jest przyłożoną siłą masową. Mając namacalne efekty lepkości, przepływ pełzający jest odpowiednim podejściem, które można wykorzystać do badania np. przepływu lawy, pływania mikroorganizmów, przepływu polimerów, smarowania itp.

### Zastosowanie liczby Reynoldsa

Numeryczne rozwiązanie przepływu cieczy opiera się na modelach matematycznych, które zostały opracowane zarówno na podstawie badań eksperymentalnych, jak i praw fizycznych opisujących dynamikę płynów. Jednym z kluczowych etapów w analizie numerycznej przepływu jest wybór odpowiedniego modelu matematycznego, który będzie odwzorowywał rzeczywistą domenę fizyczną. W celu uzyskania wiarygodnych prognoz zachowania cieczy w różnych warunkach, liczba Reynoldsa odgrywa kluczową rolę jako kryterium doboru modelu i analizy przepływu.

Liczba Reynoldsa jest szczególnie użyteczna w przewidywaniu rodzaju przepływu—laminarnego, turbulentnego lub przejściowego—co umożliwi stosowanie właściwych równań lub metod numerycznych w zależności od warunków przepływu. Przykładem może być przepływ mleka w przewodzie kołowym, gdzie liczba Reynoldsa pozwala określić charakter przepływu w zależności od prędkości, lepkości dynamicznej i wymiarów geometrycznych przewodu. W tym przypadku liczba Reynoldsa może być obliczona jako:

Tabela 2: Dane potrzebne do wyliczenia liczby Reynoldsa

Materiał	Mleko
Gęstość dla 20° C	1030
Lepkość dynamiczna ( $Pa \cdot s$ )	0,950
Średnica kanału ( $m$ )	0,05
Prędkość przepływu gliceryny na wlocie ( $\frac{m}{s}$ )	0,5

$$Re = \frac{\rho V D_H}{\mu} = \frac{1030 \cdot 0,5 \cdot 0,05}{0,950} \approx 27,1$$

Z uzyskanych obliczeń można wywnioskować, że przepływ mleka jest przepływem laminarnym zgodnie z krytyczną liczbą Reynoldsa dla przepływu wewnętrznego.