

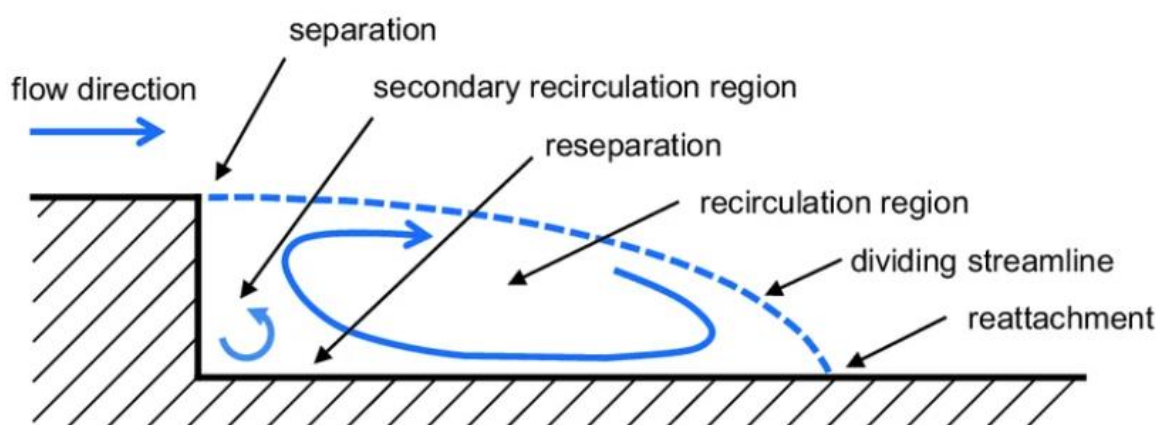
„Czy rozwiązanie steady-state jest jednoznaczne? Analiza wrażliwości na warunki początkowe na przykładzie przepływu za stopniem”

Wstęp

W analizach CFD powszechnie zakłada się, że dla zadanej geometrii i warunków brzegowych rozwiązanie symulacji ustalonej w czasie (steady-state) jest jednoznaczne. W praktyce inżynierskiej prowadzi to często do wniosku, że uzyskanie zbieżności obliczeń jest równoznaczne z poprawnością wyniku.

W artykule pokazano, że takie założenie nie zawsze jest spełnione. W szczególności dla przepływów turbulentnych modelowanych metodą RANS, rozwiązanie steady-state może nie być jednoznaczne, a uzyskany wynik zależy od przyjętych warunków początkowych.

Celem artykułu jest wyjaśnienie mechanizmu tego zjawiska oraz przedstawienie jego konsekwencji na przykładzie klasycznego przypadku przepływu za stopniem (Backward-Facing Step).



Rysunek 1 Przepływ za stopniem (Backward-Facing Step)

Charakter nieliniowy równań przepływu

Podstawą symulacji CFD są równania Naviera–Stokesa, które zawierają człon konwekcyjny odpowiedzialny za transport pędu przez sam przepływ. Wygląd równania Naviera–Stokesa dla przepływu nieściśliwego wygląda następująco:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Członem konwekcyjnym nazywamy poniższy fragment równania:

$$\rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

To właśnie ten składnik powoduje nieliniowy charakter problemu, ponieważ występuje jednocześnie jako zmienna i operator transportu. Oznacza to, że przepływ wpływa sam na siebie poprzez transport własnego pędu. Nieliniowość oznacza, że układ równań może dopuszczać więcej niż jedno rozwiązanie spełniające te same warunki brzegowe. W kontekście przepływów oznacza to, że dla tej samej geometrii możliwe są różne stabilne struktury przepływu, np. różniące się długością strefy recyrkulacji czy intensywnością mieszania.

W kontekście przepływu BFS (Backward-Facing Step), nieliniowość objawia się w sposób bardzo intuicyjny:

- przepływ przyspieszający nad stopniem generuje silne gradienty prędkości
- te gradienty determinują rozwój warstwy ścinania
- warstwa ścinania generuje separację
- separacja zmienia pole ciśnienia

- zmienione ciśnienie wpływa na dalszy rozwój przepływu

W efekcie powstaje pętla sprzężenia zwrotnego, która nie jest narzucona z zewnątrz, lecz wynika bezpośrednio z równań. W jednym przypadku otrzymuje się krótszą strefę recyrkulacji oraz słabszą strukturę wirową, natomiast w innym – wydłużoną strefę separacji i bardziej rozwiniętą strukturę wirów. Oba te stany są matematycznie poprawnymi rozwiązaniami równań, ponieważ każdy z nich generuje pole prędkości, które samo siebie podtrzymuje w sensie dynamicznym.

W przypadku problemów liniowych, takich jak układ równań algebraicznych zapisany w postaci $Au = b$, rozwiązanie jest jednoznaczne (przy spełnieniu standardowych założeń dotyczących układu). Dodatkowo obowiązuje zasada superpozycji, co oznacza, że odpowiedź układu zmienia się proporcjonalnie do zmian wymuszenia. Układ taki nie wykazuje samowzmacniania ani wielorozwiązaniowości.

Sytuacja fundamentalnie zmienia się w przypadku układów nieliniowych, które w ogólnej postaci można zapisać jako $R(u) = 0$. W tego typu problemach nie istnieje gwarancja jednoznaczności rozwiązania. Układ może posiadać wiele stanów spełniających równania, w tym zarówno rozwiązania stabilne, jak i niestabilne. Co istotne, niewielkie zmiany w warunkach początkowych mogą prowadzić zarówno do zaniku zaburzeń, jak i ich wzmocnienia, co wynika bezpośrednio z nieliniowej struktury równań.

W kontekście przepływów CFD oznacza to, że nieliniowość umożliwia istnienie wielu samopodtrzymujących się struktur przepływu, które są wewnętrznie spójne i stabilne w sensie numerycznym. Każda z takich struktur stanowi osobne rozwiązanie układu równań, mimo że odpowiada temu samemu zestawowi warunków brzegowych.

W konsekwencji warunki początkowe odgrywają kluczową rolę w procesie numerycznym. Na początku obliczeń solver dysponuje pewnym polem początkowym, które może odpowiadać np. przepływowi jednorodnemu, profilowi wlotowemu lub wynikowi innej symulacji. To właśnie to pole stanowi punkt startowy dla iteracyjnego procesu rozwiązywania równań.

Jeżeli warunki początkowe są bliższe jednej z możliwych struktur przepływu, solver będzie miał tendencję do konwergencji właśnie do tego rozwiązania. Przejście do innego stanu wymagałoby znaczącej zmiany globalnej struktury pola przepływu, co w iteracyjnym procesie numerycznym nie zachodzi spontanicznie.

Należy podkreślić, że nie jest to błąd solvera ani problem numeryczny, lecz naturalna konsekwencja matematycznego charakteru układu równań. Istnieje wiele poprawnych stanów równowagi, a metoda numeryczna wybiera jeden z nich w zależności od trajektorii iteracyjnej.

Sytuacja ta jest szczególnie istotna w metodzie RANS, gdzie dodatkowo wprowadza się uśrednianie w czasie oraz modelowanie turbulencji. W wyniku tego eliminowane są fluktuacje chwilowe, a ich wpływ zastępowany jest modelem statystycznym. Choć upraszcza to problem, jednocześnie powoduje, że układ opisuje nie jedną fizyczną rzeczywistość, lecz wiele potencjalnych stanów uśrednionych, które mogą spełniać równania zamkniętego modelu.

W efekcie nawet w ramach podejścia RANS rozwiązanie steady-state nie musi być jednoznaczne, a jego postać zależy od przyjętych warunków początkowych oraz sposobu inicjalizacji obliczeń.

Rozwiązanie steady-state jako proces w pseudo-czasie

Choć symulacje typu steady-state w CFD definiowane są jako problemy niezależne od czasu, ich numeryczna realizacja w praktyce nie polega na bezpośrednim rozwiązaniu układu równań w jednym kroku. Zamiast tego stosowane są metody iteracyjne, które przekształcają problem stacjonarny w proces ewolucyjny.

W ujęciu matematycznym, równanie steady-state:

$$R(\mathbf{U}) = 0$$

nie jest rozwiązywane bezpośrednio, lecz poprzez sekwencję przybliżeń:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta \mathbf{U}$$

gdzie każda iteracja stanowi lokalną korektę pola przepływu. W praktyce oznacza to, że solver nie „znajduje” rozwiązania w sensie algebraicznym, lecz stopniowo do niego dąży poprzez kolejne aktualizacje.

Taki sposób rozwiązywania można interpretować jako wprowadzenie sztucznego czasu obliczeniowego, często określanego jako pseudo-czas. W tym ujęciu proces iteracyjny może być zapisany w formie równania ewolucyjnego:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} = -R(\mathbf{U})$$

Gdzie τ oznacza czas numeryczny, niezwiązany z rzeczywistą fizyką przepływu. Wprowadzenie tej formy pozwala traktować problem steady-state jako układ dynamiczny, który ewoluuje w kierunku stanu równowagi.

Z punktu widzenia fizyki obliczeniowej, każda iteracja solvera odpowiada lokalnej relaksacji pola przepływu. Pole prędkości i ciśnienia jest sukcesywnie korygowane w taki sposób, aby spełniało równania zachowania masy i pędu coraz dokładniej.

W tym sensie proces obliczeniowy można interpretować jako sztuczną dynamikę układu, w której:

- stan początkowy odpowiada warunkom inicjalizacji,
- kolejne iteracje reprezentują ewolucję układu,
- stan końcowy odpowiada punktowi stacjonarnemu tej dynamiki.

Kluczowe jest to, że ewolucja ta ma charakter lokalny. Oznacza to, że każda iteracja bazuje wyłącznie na aktualnym stanie pola przepływu oraz jego lokalnych korektach numerycznych. Solver nie analizuje globalnej struktury przestrzeni rozwiązań, lecz porusza się w jej bezpośrednim sąsiedztwie.

Oznacza to, że proces iteracyjny nie prowadzi do jednego uniwersalnego wyniku, lecz do jednego z możliwych stanów równowagi.

Kluczową konsekwencją takiego podejścia jest fakt, że wynik końcowy nie zależy wyłącznie od równań i warunków brzegowych, ale również od trajektorii, jaką solver przyjmuje w przestrzeni rozwiązań.

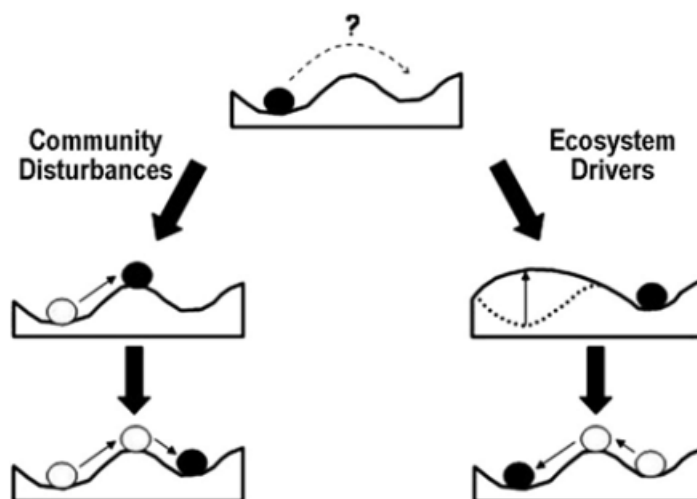
Trajektoria ta jest determinowana przez:

- warunki początkowe,
- sposób inicjalizacji pola przepływu,
- lokalne schematy numeryczne,
- parametry relaksacji,
- historię wcześniejszych iteracji.

W praktyce oznacza to, że dwa identyczne problemy fizyczne mogą prowadzić do różnych stanów końcowych, jeśli ich trajektorie iteracyjne przebiegają przez różne obszary przestrzeni rozwiązań.

Bardzo użyteczną analogią jest wyobrażenie sobie kulki poruszającej się po powierzchni z wgłębieniami. Każde z tych zagłębień, odpowiada innemu rozwiązaniu steady-state. Kulka, rozpoczynając swój ruch z określonego punktu początkowego, przemieszcza się po płaszczyźnie i ostatecznie stabilizuje się w jednym z dostępnych minimów (zostało to przedstawione na poniższej ilustracji).

W tej analogii można bezpośrednio przypisać elementy matematyczne do intuicyjnych pojęć fizycznych: rozwiązanie steady-state odpowiada dnu doliny, warunki początkowe odpowiadają punktowi startowemu kulki, iteracje solvera odpowiadają jej ruchowi, natomiast nieliniowość równań determinuje kształt całej powierzchni, czyli topologię przestrzeni rozwiązań. W konsekwencji różne punkty startowe mogą prowadzić do różnych dolin, czyli różnych stabilnych rozwiązań.



Rysunek 2 Wizualizacja możliwych rozwiązań problemu

Kluczową cechą metod iteracyjnych stosowanych w CFD jest ich lokalny charakter. Po osiągnięciu stanu bliskiego rozwiązaniu steady-state, residue równań stają się bardzo małe, a układ znajduje się w pobliżu jednego z punktów równowagi. W tym stanie solver nie posiada mechanizmu umożliwiającego opuszczenie danego minimum i eksplorację innych obszarów przestrzeni rozwiązań.

Oznacza to, że po wejściu w dany stan równowagi proces iteracyjny staje się lokalnie stabilny i nie prowadzi do globalnych przeskoków pomiędzy różnymi rozwiązaniami. Innymi słowy, solver nie „wie”, że istnieją inne możliwe stany steady-state — operuje wyłącznie w obrębie lokalnej struktury, do której trafił w wyniku wcześniejszej ewolucji.

Atraktory i baseny przyciągania w przestrzeni rozwiązań CFD

Interpretacja problemu steady-state jako układu dynamicznego w pseudo-czasie prowadzi naturalnie do bardziej ogólnego opisu procesu konwergencji w CFD. W tym ujęciu rozwiązania równań Naviera–Stokesa można traktować jako punkty równowagi w przestrzeni stanów przepływu, natomiast sam proces iteracyjny jako trajektorię poruszającą się w tej przestrzeni.

Rozwiązania steady-state spełniają warunek zaniku reszt:

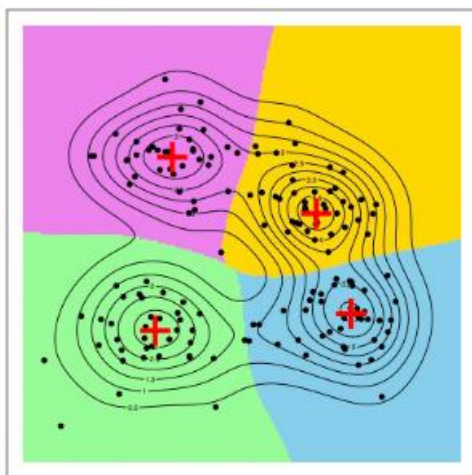
$$R(\mathbf{U}) = 0$$

co oznacza, że odpowiadają one punktom stałym układu dynamicznego opisanego równaniem ewolucyjnym w pseudo-czasie. W takich punktach układ przestaje ewoluować, ponieważ lokalne korekty numeryczne prowadzą do zaniku reszt równań. Jednak kluczową cechą układów nieliniowych jest to, że liczba takich punktów stałych może być większa niż jeden. Oznacza to, że dla tego samego zestawu warunków brzegowych istnieje potencjalnie wiele różnych stanów równowagi.

Nie wszystkie punkty stałe mają jednak ten sam charakter. Istotna jest ich stabilność, która determinuje zachowanie układu w przypadku niewielkich zaburzeń. Jeżeli dane rozwiązanie jest stabilne, oznacza to, że małe perturbacje pola przepływu zanikają w trakcie iteracji, a układ powraca do tego samego stanu. Takie rozwiązania można interpretować jako **atraktory**, czyli stabilne stany równowagi układu równań CFD.

Każdy atraktor posiada swój **basen przyciągania**, czyli zbiór wszystkich warunków początkowych, które prowadzą do tego samego rozwiązania w procesie iteracyjnym. W praktyce oznacza to, że różne inicjalizacje pola przepływu mogą prowadzić do tego samego stanu końcowego, o ile znajdują się w obrębie tego samego basenu. Jednocześnie istnieją również takie

warunki początkowe, które prowadzą do innych atraktorów, odpowiadających odmiennym konfiguracjom przepływu. Wizualizacja basenów przyciągania jest przedstawiona poniżej.



Rysunek 3 Wizualizacja basenów przyciągania

Z punktu widzenia geometrii przestrzeni rozwiązań proces konwergencji można interpretować jako ruch punktu reprezentującego aktualny stan przepływu po wielowymiarowej powierzchni. Każdy punkt tej przestrzeni odpowiada konkretnemu rozkładowi pól takich jak prędkość, ciśnienie czy wielkości turbulencyjne. Operator numeryczny definiuje lokalny kierunek „spadku” w tej przestrzeni, prowadząc układ w stronę zmniejszenia reszt równań. Atraktory odpowiadają lokalnym stanom równowagi tej struktury.

W przypadku układów nieliniowych, takich jak przepływy turbulentne modelowane metodą RANS, przestrzeń ta nie posiada jednego globalnego minimum. Zamiast tego występuje wiele lokalnych minimów, które odpowiadają różnym, ale matematycznie poprawnym rozwiązaniom steady-state. Każde z tych rozwiązań spełnia równania modelu i może być osiągnięte w procesie iteracyjnym.

W konsekwencji solver CFD nie przeszukuje globalnie przestrzeni rozwiązań, lecz porusza się lokalnie w obrębie jednego basenu przyciągania. Oznacza to, że trajektoria iteracyjna zależy od warunków początkowych, które determinują, do którego atraktora zostanie skierowana ewolucja układu. Przejście pomiędzy różnymi atraktorami nie zachodzi w sposób naturalny w standardowym procesie iteracyjnym, ponieważ wymagałoby globalnej zmiany struktury pola przepływu.

Z praktycznego punktu widzenia prowadzi to do istotnego wniosku: wynik symulacji steady-state nie jest wyłącznie funkcją geometrii i warunków brzegowych, ale również zależy od topologii przestrzeni rozwiązań oraz punktu startowego procesu iteracyjnego. W konsekwencji różne inicjalizacje mogą prowadzić do różnych, ale równie poprawnych matematycznie stanów przepływu.

RANS jako mechanizm zwiększający liczbę atraktorów i deformujący przestrzeń rozwiązań

Wprowadzenie modeli RANS do równań Naviera–Stokesa istotnie zmienia strukturę matematyczną problemu CFD. O ile klasyczne równania pędu opisują ewolucję pól prędkości i ciśnienia, o tyle modelowanie turbulencji wprowadza dodatkowy układ równań zamykających, który zastępuje informację o fluktuacjach chwilowych ich uśrednionym wpływem. W rezultacie problem zostaje rozszerzony o dodatkowe zmienne, takie jak energia kinetyczna turbulencji k oraz jej dyssypacja ϵ lub częstotliwość specyficzna ω , co prowadzi do zwiększenia wymiarowości przestrzeni rozwiązań.

W klasycznym ujęciu przestrzeni stanów CFD można zapisać jako $(\mathbf{u}, p)$, natomiast w przypadku RANS zostaje ona rozszerzona do postaci $(\mathbf{u}, p), k, \varepsilon, \omega$. Każdy stan przepływu jest więc opisywany nie tylko przez pole prędkości i ciśnienia, ale również przez lokalny stan turbulencji. Oznacza to istotne zwiększenie liczby stopni swobody układu, co bezpośrednio wpływa na strukturę przestrzeni rozwiązań.

Modele turbulencji wprowadzają jednocześnie dodatkowe nieliniowości oraz silne sprzężenia między polami. Turbulentna lepkość efektywna, zależna od zmiennych modelu, wpływa na transport pędu, jednocześnie sama będąc funkcją lokalnych gradientów prędkości. Powstaje w ten sposób zamknięty układ sprzężonych równań, w którym pole prędkości wpływa na zmienne turbulencyjne, a te z kolei modyfikują dyfuzję pędu. Takie sprzężenie zwrotne prowadzi do deformacji struktury przestrzeni rozwiązań w porównaniu do przypadku laminarnego.

Wprowadzenie RANS może prowadzić zarówno do stabilizacji, jak i destabilizacji określonych struktur przepływu. Niektóre konfiguracje zostają wzmocnione przez model turbulencji, inne ulegają tłumieniu, a jeszcze inne mogą pojawić się jako nowe stabilne stany równowagi. W konsekwencji liczba dopuszczalnych rozwiązań steady-state może wzrosnąć, a sama przestrzeń rozwiązań przyjmuje bardziej złożoną strukturę topologiczną.

Oprócz zmiany liczby atraktorów istotnie zmienia się również kształt ich basenów przyciągania. Ze względu na silne sprzężenia między zmiennymi przepływowymi i turbulencyjnymi, granice pomiędzy poszczególnymi obszarami przyciągania stają się nieliniowe i wrażliwe na niewielkie zmiany warunków początkowych. W praktyce oznacza to, że nawet niewielkie różnice w inicjalizacji mogą prowadzić do konwergencji do różnych rozwiązań steady-state.

Z punktu widzenia symulacji CFD prowadzi to do dwóch istotnych konsekwencji. Po pierwsze, liczba możliwych stanów równowagi układu może wzrosnąć w wyniku wprowadzenia modelu turbulencji. Po drugie, sama struktura przestrzeni rozwiązań ulega deformacji, co zwiększa wrażliwość rozwiązania na warunki początkowe oraz sposób inicjalizacji obliczeń. W efekcie rozwiązanie steady-state w RANS staje się jeszcze bardziej zależne od trajektorii numerycznej niż w przypadku równań laminarnego przepływu.

Implikacje praktyczne dla CFD – jak wykrywać fakt, że istnieje wiele rozwiązań i jak je kontrolować w praktyce

Opisane wcześniej zjawiska mają bezpośrednie konsekwencje dla praktyki inżynierskiej CFD. Fakt, że rozwiązanie steady-state w układach RANS może nie być jednoznaczne, oznacza, że sama zbieżność numeryczna nie jest wystarczającym kryterium poprawności wyniku. W praktyce konieczne jest świadome podejście do weryfikacji, inicjalizacji oraz analizy wrażliwości rozwiązania.

Pierwszym sygnałem potencjalnych wielu rozwiązań jest silna zależność wyników od warunków początkowych lub sposobu inicjalizacji. Jeżeli dwie symulacje różniące się jedynie polem startowym prowadzą do istotnie różnych wyników globalnych (np. długości strefy recyrkulacji, rozkładu ciśnienia czy struktury separacji), oznacza to, że układ znajduje się w obszarze wielu atraktorów. W takich przypadkach nie można mówić o jednym „rozwiązaniu CFD”, lecz o zbiorze dopuszczalnych stanów równowagi.

Drugim istotnym narzędziem diagnostycznym jest analiza historii konwergencji wielkości fizycznych, a nie tylko residuów równań. W szczególności należy monitorować wielkości globalne, takie jak siły, spadki ciśnienia, długość strefy recyrkulacji czy średnie pola przepływu. Stabilizacja residuów przy jednoczesnej zmianie tych wielkości może wskazywać na konwergencję do innego atraktora lub na przejście przez różne stany pośrednie w przestrzeni rozwiązań.

Trzecim podejściem jest wykonywanie symulacji z różnymi inicjalizacjami. W praktyce może to obejmować:

- start z jednorodnego pola prędkości,
- start z profilu w pełni rozwiniętego,
- wykorzystanie wyników z innej symulacji jako warunku początkowego,
- wprowadzenie kontrolowanych zaburzeń w polu przepływu.

Porównanie wyników pozwala ocenić, czy rozwiązanie jest unikalne, czy też istnieje wiele stabilnych stanów równowagi dla tego samego problemu fizycznego.

Czwartym elementem kontroli jest świadome wykorzystanie podejścia nieustalonego (transient). W wielu przypadkach przepływu, które w ujęciu RANS wykazują wiele rozwiązań, w rzeczywistości są fizycznie niestacjonarne. Symulacja transient pozwala wówczas na obserwację rzeczywistej dynamiki układu i może ujawnić, że pozornie różne rozwiązania steady-state są jedynie różnymi średnimi czasowymi tego samego procesu niestacjonarnego.

Istotną rolę odgrywa również siatka numeryczna. Zbyt rzadka siatka lub niewłaściwa dystrybucja elementów może sztucznie stabilizować lub destabilizować określone struktury przepływu, prowadząc do preferencji jednego z atraktorów. W szczególności obszary separacji i ponownego przyłączenia przepływu wymagają lokalnego zagęszczenia siatki, ponieważ to właśnie tam układ jest najbardziej wrażliwy na perturbacje.

W praktyce inżynierskiej kluczowe jest zatem przyjęcie założenia, że wynik CFD nie jest pojedynczą wartością, lecz potencjalnym zbiorem rozwiązań zależnych od trajektorii numerycznej. Oznacza to konieczność traktowania symulacji steady-state nie jako jednorazowego obliczenia, ale jako procesu analizy wrażliwości układu nieliniowego.

Podsumowując, wiele rozwiązań w CFD nie jest anomalią numeryczną, lecz naturalną konsekwencją nieliniowego charakteru równań Naviera–Stokesa oraz ich implementacji w formie iteracyjnych metod pseudo-czasowych. Świadomość tego faktu pozwala nie tylko poprawnie interpretować wyniki, ale również projektować bardziej wiarygodne i odporne analizy CFD.

Wnioski końcowe

Steady-state w CFD nie jest problemem statycznym, lecz wynikiem procesu iteracyjnego w pseudo-czasie. Nieliniowość równań Naviera–Stokesa prowadzi do istnienia wielu stabilnych stanów równowagi, a solver konverguje do jednego z nich w zależności od warunków początkowych oraz ścieżki numerycznej.

Modele RANS dodatkowo zwiększają złożoność przestrzeni rozwiązań, wprowadzając nowe zmienne i sprzężenia, co może prowadzić do większej liczby dopuszczalnych stanów steady-state. Brak różnic w residualach nie gwarantuje więc jednoznaczności fizycznej rozwiązania.

Z tego względu weryfikacja wyników CFD powinna obejmować analizę wrażliwości na inicjalizację, a w przypadku przepływów z separacją zalecane jest odniesienie do symulacji transient. Ostatecznie wynik CFD należy traktować jako jeden z możliwych stanów układu, a nie jako jedyną poprawną odpowiedź.